Faculté des Sciences et Techniques de Tanger — Année universitaire 2007-2008

MIPC1 – M121

Contrôle Continu N°2

Exercice 1. On note $B=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f_m(e_1)=me_1+e_2+e_3$$
$$f_m(e_2)=e_1+me_2+e_3$$
$$f_m(e_3)=e_1+e_2+me_3$$

Où m est un paramètre réel.

1) Ecrire la matrice $M(f_m, B)$ de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Pour quelles valeurs de m, $M(f_m, B)$ est inversible ?
3) Calculer le noyau de f_m et $\mathrm{Im} f_m$. Quel est son rang ? Discuter suivant les valeurs de m.
4) On considère l'ensemble $E=\{M(f_m,B), m\in\mathbb{R}\}$. E est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$? E est-il stable pour la multiplication des matrices ?

5) Discuter suivant la valeur de m l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} mx+y+z=m-1 \\ x+my+z=m+2 \\ x+y+mz=m^2-1 \end{cases}$$

6) Pour la suite, on prend $m=2$. On définit :

$$e'_1=e_2+e_3 \quad , \quad e'_2=e_1+e_3 \quad , \quad e'_3=e_1+e_2$$

i) Monter que $B'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii) Donner la matrice $M(f_2,B')$. On notera A cette matrice.

iii) Calculer le polynôme caractéristique de A, en déduire les valeurs propres de A.

iv) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.

v) La matrice A est-elle diagonalisable ?

vi) Calculer la puissance n-ième de A.





Institut la centrale

Contrôle continue N: 2

07-08

(1)

Exercice 1

1/ $M = M(f_m, B) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

2/ $\det M = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m^3 + 1 + 1) - (m + m + m) = m^3 - 3m + 2$

$= (m-1)(m-1)(m+2) = (m-1)^2 (m+2)$

$\begin{matrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{matrix}$

M est inversible $\Leftrightarrow \det M \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ et $m \neq -2$

3/ $\mathrm{Ker} f_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f((x,y,z)) = (0,0,0)\}$

$f((x,y,z)) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx + y + z \\ x + my + z \\ x + y + mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$

1° cas: Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$ alors $\det M \neq 0$

le système est de Cramer et homogène donc $(x,y,z) = (0,0,0)$

d'où $\mathrm{Ker} f_m = \{(0,0,0)\}$

On a $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f_m + \dim \mathrm{Im} f \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f_m = 3 - 0 = 3$

d'où $\mathrm{Im} f_m = \mathbb{R}^3 \Rightarrow rg f_m = 3$

2° cas: Si $m = 1$ alors le système se réduit à l'équation

$x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$

$(x,y,z) = (x, y, -x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$

$B_1 = \{(1,0,-1) ; (0,1,-1)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker} f_1$

or B_1 est libre $(\alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

donc B_1 est une base de $\mathrm{Ker} f_1$ et $\dim \mathrm{Ker} f_1 = 2$

De plus $\dim \mathrm{Im} f_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker} f_1 = 3 - 2 = 1$

et $f_1(e_1) = f_2(e_2) = f_3(e_3) = e_1 + e_2 + e_2$

d'où $\mathrm{Im} f_1 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_2) \Rightarrow rg f_1 = \dim \mathrm{Im} f_1 = 1$

3°cas si $m = -2$ alors le système s'écrit

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 & (1) \\ x - 2y + z = 0 & (2) \\ x + y - 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow -x - y + 2z = 0$ équivalent à l'équation (3)

donc le système se réduit à $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -z \\ x - 2y = -z \end{cases}$

$(1) + 2(2) \Rightarrow -3y = -3z \Rightarrow y = z$ et $x = -z + 2z = z$

d'où $(x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$

$\mathrm{Ker} f_{-2} = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$

$\dim \mathrm{Im} f_{-2} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker} f_{-2} = 3 - 1 = 2$

et $f_{-2}(e_1) = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_{-2}(e_2) = e_1 - 2e_2 + e_3$

$\mathrm{Im} f_{-2} = \mathrm{Vect}(-2e_1 + e_2 + e_3, e_1 - 2e_2 + e_3)$

4/. E n'est pas un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ car $0 \notin E$

. $M.M' = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m' & 1 & 1 \\ 1 & m' & 1 \\ 1 & 1 & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mm' + 2 & m + m' + 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \notin E$

donc E n'est pas stable pour la multiplication

5/ $\begin{cases} mx + y + z = m - 1 \\ x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = m^2 - 1 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$

. 1°cas : si $m \neq 1$ et $m \neq -1$ alors $\Delta \neq 0$ donc le système admet une solution unique (x, y, z)

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$

$\Delta x = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m+2 & m & 1 \\ m^2-1 & 1 & m \end{vmatrix}$ $\Delta y = \begin{vmatrix} m & m-1 & 1 \\ 1 & m+2 & 1 \\ 1 & m^2-1 & m \end{vmatrix}$ $\Delta z = \begin{vmatrix} m & 1 & m-1 \\ 1 & m & m+2 \\ 1 & 1 & m^2-1 \end{vmatrix}$


ETUSUP.com